

Title	多次元複素力学系におけるBottcherの定理と超安定多様体について(力学系の構造と分岐)
Author(s)	宇敷, 重広
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 804: 157-171
Issue Date	1992-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/82903
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

多次元複素力学系における Böttcher の定理と超安定多様体について

京都大学人間・環境学研究科 宇敷重広 (Shigehiro Ushiki)

0. はじめに

1次元複素力学系 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ において、 $p \in \mathbb{C}$ が $f(p) = p$, $f'(p) = 0$ をみたすとき、 p を超吸引的不動点という。 f が定数値関数でなければ、 f は p の近傍において、ある次数 $k > 1$ について、 $z \mapsto z^k$ に複素解析的に共役である。これが古典的な Böttcher の定理である。ここでは、多次元の複素力学系において、超吸引的な不動点について考察する。

まず、複素2次元で考える。 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を、原点の近傍において定義された複素解析的写像とし、原点 O は f の不動点であり、原点におけるヤコビ行列 Df_O の固有値は2つとも0であるとする。一般には解析的な座標変換によって簡単な形に「標準化」する事はできないが、ある(かなり強い)条件を課すると、解析的に「標準化」することができる。同様のことは2よりも高い次元でも成り立つ。このことを、多次元版の Böttcher の定理として第2節で述べる。

2次元複素力学系 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ において、 f の不動点の固有値の一方が0、他方の絶対値が1より大のとき、この不動点をスーパーサドルとよぶことにしよう。この時、絶対値が1より大きい固有値にたいする不安定多様体の存在は古くから知られている。第4節において、固有値0に対応する「超安定多様体」が存在することをしめす。証明を見ればわかるように、多次元においても同様の議論が成り立つ。

1. Böttcher の定理

まず、古典的な Böttcher の定理について述べる。 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は原点 O の近傍において複素解析的であり、 O は超吸引的な不動点であるとする。すなわち、

$$f(O) = O, \quad f'(O) = 0.$$

必要なら線形の座標変換をほどこすことによって、

$$f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$$

と仮定してよい。ただし、 $k \geq 2$ とする。

定理 (Böttcher)

$$f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$$

が原点の近傍において解析的であるとする。このとき原点の近傍 U, V と、解析的写像

$$\varphi: U \rightarrow V, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

で

$$\varphi \circ f(z) = (\varphi(z))^k$$

が原点の近傍において成り立つものが存在する。

証明 十分小さな $r > 0$ に対し、原点を中心とする、半径 r の開円板 D_r は f の定義域に含まれ、 $\text{closure}(f(D_r)) \subset D_r$ であり、すべての $z \in D_r$ に対し、 $f^n(z) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となっている。さらに、 D_r においては、 $f(z)$ は 0 以外に特異点を持たないと仮定してよい。 $f: D_r \rightarrow D_r$ は k 重の branched cover なので、 $f(z)^{\frac{1}{k}}$ を考えることができる。 $z \in D_r$ に対し、

$$\varphi_0(z) = z$$

$$\varphi_1(z) = (f(z))^{\frac{1}{k}} \quad (\text{ただし } \varphi'(0) = 1)$$

とする。同様に

$$\varphi_n(z) = (f^{\circ n}(z))^{\frac{1}{k^n}} \quad (\varphi'_n(0) = 1)$$

として、順次解析的写像 $\varphi_n: D_r \rightarrow \mathbb{C}$ を定義することができる。 $(f^{\circ n}$ は f の n 回合成を表す。)

以下で、 $n \rightarrow \infty$ のとき φ_n は D_r 上で一様収束する事を示すが、

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

とすれば

$$\varphi \circ f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\circ n}(f(z)))^{\frac{1}{k^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^{\circ(n+1)}(z))^{\frac{1}{k^{n+1}}})^k = (\varphi(z))^k$$

が成り立つので、 $\varphi: D_r \rightarrow \varphi(D_r)$ が求める座標変換である。

φ_n が D_r で一様収束する事を示す。まず、 $H(z): D_r \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$H(z) = \frac{\varphi_1(z)}{z}, \quad H(0) = 1$$

によって定義する。 $H(z)$ は D_r において解析的であり、その値は 1 の近傍にあり、 $H(z) \neq 0$ である。 $H(z)^{\frac{1}{m}}$ は $H(0) = 1$ となる分枝を選ぶ。

$$\varphi_1(z) = (f(z))^{\frac{1}{k}} = zH(z)$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} &= \frac{(f^{\circ(n+1)}(z))^{\frac{1}{k^{n+1}}}}{(f^{\circ n}(z))^{\frac{1}{k^n}}} = \left(\frac{(f(f^{\circ n}(z)))^{\frac{1}{k}}}{f^{\circ n}(z)} \right)^{\frac{1}{k^n}} \\ &= \left(\frac{\varphi_1(f^{\circ n}(z))}{f^{\circ n}(z)} \right)^{\frac{1}{k^n}} = (H(f^{\circ n}(z)))^{\frac{1}{k^n}}\end{aligned}$$

と書けるので、

$$\varphi_{n+1}(z) = z \prod_{i=0}^n \frac{\varphi_{i+1}(z)}{\varphi_i(z)} = z \prod_{i=0}^n (H(f^{\circ i}(z)))^{\frac{1}{k^i}}$$

となる。

$$\log\left(\frac{\varphi_{n+1}(z)}{z}\right) = \sum_{i=0}^n \log(H(f^{\circ i}(z))^{\frac{1}{k^i}}) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{k^i} \log(H(f^{\circ i}(z)))$$

であるが、 $f^{\circ i}(z) \in D_r$ に注意すれば、 $\log(H(f^{\circ i}(z)))$ は一様有界であり、 φ_n が φ に一様収束することがわかった。

2. 2次元における Böttcher の定理

多次元でも同様の定理が成り立つが、簡単のため2次元の場合について述べる。

$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は、原点 $O = (0, 0)$ の近傍で複素解析的であり、原点 O は F の不動点であるとする。すなわち、 $F(O) = O$ 。

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

とおき、 x 軸および y 軸はそれぞれ F のもとで不変であり、

$$f_1(x, 0) = x^2 + h.o.t., \quad f_2(0, y) = y^2 + h.o.t.$$

となっていると仮定する。さらに、 $\det(DF)$ は x 軸と y 軸において零になっていると仮定する。これらの仮定はきわめて特殊なものであるが、これを満たさない場合には、複素解析的な座標変換によって以下にのべるような形にすることはきわめて困難と思われる。以上の仮定の下で、さらに、 x 座標、 y 座標にたいし、 x 軸、 y 軸における F を標準化するように Böttcher の定理を適用すれば、原点の近傍において、

$$f_1(x, y) = x^2(1 + yg_1(x, y))$$

$$f_2(x, y) = y^2(1 + xg_2(x, y))$$

と書くことができる。ここで、 $g_1(x, y)$ および $g_2(x, y)$ は複素解析的である。

写像 $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $\psi(x, y) = (x^2, y^2)$ で定義する。

定理 上記の仮定の下で、原点の近傍において定義された複素解析的な座標変換 $\Phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ で、

$$\Phi(0,0) = (0,0), \quad D\Phi_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\Phi \circ F = \psi \circ \Phi$$

が原点の近傍において成り立つものが存在する。

証明

$$DF_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、 \mathbb{C}^2 における原点の近傍 U で、 $\text{closure}(F(U)) \subset U$ を満たし、任意の $(x,y) \in U$ にたいし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(x,y) = 0$ となるようなものが存在する。さらに、 U 上で、

$$|yg_1(x,y)| < \frac{1}{2}, \quad |xg_2(x,y)| < \frac{1}{2}$$

が成り立つと仮定してよい。

$$F^{on}(x,y) = (F_1^{on}(x,y), F_2^{on}(x,y)) = (x_n, y_n)$$

と書くことにする。まず、 Φ の第一成分 Φ_1 について考える (第2成分 Φ_2 についても同様である)。

$\varphi_0(x,y) = x$ とし、

$$\varphi_n(x,y) = (F_1^{on}(x,y))^{\frac{1}{2^n}}$$

によって $\varphi_n(x,y)$ を定義しよう。 $\varphi_n(x,y)$ は、 $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(0) = 1$ をみたす枝を選ぶ。 F が y 軸を y 軸にうつすので、 F の形から、 φ_n は原点の近傍で解析的な関数である。以下に示すように、 φ_n は U 上で一様収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \Phi_1$ とおけば、 Φ_1 は関数方程式

$$\Phi_1 \circ F = \Phi_1^2$$

をみたすことになる。 φ_n が U 上で一様収束する事を示そう。

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1}(x,y)}{\varphi_n(x,y)} &= \frac{(F_1^{on(n+1)}(x,y))^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{(F_1^{on}(x,y))^{\frac{1}{2^n}}} = \left(\frac{(f_1(F^{on}(x,y)))^{\frac{1}{2}}}{F_1^{on}(x,y)} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \left(\frac{(f_1(x_n, y_n))^{\frac{1}{2}}}{x_n} \right)^{\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{(x_n^2(1 + y_n g_1(x_n, y_n)))^{\frac{1}{2}}}{x_n} \right)^{\frac{1}{2^n}} = (1 + y_n g_1(x_n, y_n))^{\frac{1}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

となっている。 U 上では $|yg_1(x,y)| < \frac{1}{2}$ を満たすとしていたのに注意すると、

$$\varphi_{n+1}(x,y) = x \prod_{j=0}^n (1 + y_j g_1(x_j, y_j))^{\frac{1}{2^{j+1}}}$$

と表すことができるので、(ただし、 $(x_0, y_0) = (x, y)$) φ_n は U 上で一様収束する事がわかった。

第2成分についても同様にして Φ_2 を定義することができ、

$$\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$$

とすれば関数方程式

$$\Phi \circ F = \psi \circ \Phi$$

が成り立つ。

最低次の次数が2以上の場合でも同様の結果が成り立つ。

定理 $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が原点 O の近傍で複素解析的であり、整数 $k, p \geq 2$ について、

$$F(x, y) = (x^k(1 + yg_1(x, y)), y^p(1 + xg_2(x, y)))$$

と表せるとき、原点の近傍で定義された複素解析的な座標変換 $\Phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ で、

$$\Phi(0, 0) = (0, 0), \quad D\Phi_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\Phi \circ F = \Psi \circ \Phi$$

が原点の近傍において成り立つようなものが存在する。ただしここで $\Psi(x, y) = (x^k, y^p)$ とする。

3. 数値実験

$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が前節で述べた条件を満たすとき、超吸引的不動点 O の吸引鉢 $A(O)$ を、

$$A(O) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(x, y) = O\}$$

によって定義すると、 Φ を解析的に延長することにより解析的写像

$$\Phi: A(O) \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$$

がえられることになる。

数値実験によれば、 $A(O)$ は「フラクタル」な境界を持った有界領域となっている場合が有りそうである。

例1として、

$$F(x, y) = (x^2 - 4x^2y, y^2 + 2.7ixy^2)$$

について数値実験を行ったものを示そう。図1～3は $y = 0.5$ によって定義される複素直線に含まれる長方形領域の図である。その領域の x 座標はそれぞれ、

図1 : $-1.2 \leq \Re(x) \leq 1.2, -0.96 \leq \Im(x) \leq 0.96$

図2 : $-0.77 \leq \Re(x) \leq -0.67, 0.46 \leq \Im(x) \leq 0.54$

図3 : $-0.732 \leq \Re(x) \leq -0.7276, 0.4898 \leq \Im(x) \leq 0.4962$

である。

例2として、

$$F(x, y) = (x^2 - 4x^2y + x^3, y^2 + 2.7ixy^2)$$

としたものを図4～6に示す。

例3として、

$$F(x, y) = (x^2 - 4x^2y + x^3, y^2 + 2.7ixy^2 - y^3)$$

としたものを図7～9に示す。

いずれも、 $\{y = 0.5\}$ で与えられる複素直線の中の長方形領域であり、 x 座標はそれぞれ、

図4 : $-0.9 \leq \Re(x) \leq 1.5, -0.96 \leq \Im(x) \leq 0.96$

図5 : $0.2 \leq \Re(x) \leq 0.4, 0.62 \leq \Im(x) \leq 0.78$

図6 : $1.161 \leq \Re(x) \leq 1.187, -0.05 \leq \Im(x) \leq -0.28$

図7 : $-0.9 \leq \Re(x) \leq 1.5, -0.96 \leq \Im(x) \leq 0.96$

図8 : $0.375 \leq \Re(x) \leq 0.385, 0.64 \leq \Im(x) \leq 0.648$

図9 : $1.22 \leq \Re(x) \leq 1.34, 0.195 \leq \Im(x) \leq 0.285$

4. 超安定多様体

$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は原点近傍で複素解析的であり、原点 O は F の不動点とする。 F の不動点 O におけるヤコビ行列 DF_O の固有値は 0 と b 、ただし $|b| > 1$ 、であるとする。 O は F のスーパーサドルというのであった。

$$DF_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

と対角行列になっているものと仮定してよい。さらに、 x 軸においては、

$$F(x, 0) = (x^2 + O(x^3), O(x^2))$$

であるとし、 y 軸については、 y 軸は O の不安定多様体に一致し、 y 軸上で、

$$F(0, y) = (0, by + O(y^2))$$

となっているものと仮定する。

さらに、原点近傍において $\{\det(DF) = 0\} = \{0\} \times \mathbb{C}$ であると仮定する。

定理 上記の F に対し、 D の原点の近傍で定義された解析的な埋め込み $\sigma: D \rightarrow \mathbb{C}^2$ で、 $D\sigma_0 = (1, 0)$ であり、関数方程式 $F \circ \sigma(\zeta) = \sigma(\zeta^2)$ を満たすものがただ1つ存在する。

σ による D の像を (局所) 超安定多様体と呼ぼう。以下の証明からわかるように、 $\sigma(D)$ は O の (超) 安定集合である。

証明 F に関する仮定の下で、必要ならば y 座標に関する解析的な座標変換をほどこすことによって、

$$F(0, y) = (0, by)$$

となっていると仮定してよい。 x 座標についても Böttcher の座標変換をほどこして、

$$F(x, 0) = (x^2, O(x^2))$$

となっているものとする。そのとき、

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x^2(1 + g_1(x, y)), by + xg_2(x, y))$$

と表すことができる。ただしここで、 $g_1(x, y)$ および $g_2(x, y)$ は原点の近傍で定義された解析的関数で、 $g_1(x, 0) = 0$, $g_2(0, 0) = 0$ をみたす。

正の数 r_0 および u にたいし、

$$D_{r_0} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r_0\}, \quad D_u = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| < u\}$$

とする。

$$0 < r_0 < \frac{1}{4}, \quad 0 < u < 1$$

であり、 F は $D_{r_0} \times D_u$ において解析的であるとし、さらに、

$$m_1 = \sup_{(x, y) \in D_{r_0} \times D_u} |g_1(x, y)|, \quad m_2 = \sup_{(x, y) \in D_{r_0} \times D_u} |g_2(x, y)|,$$

$$M_1 = \sup_{(x, y) \in D_{r_0} \times D_u} \left| \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \right|, \quad M_2 = \sup_{(x, y) \in D_{r_0} \times D_u} \left| \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \right|,$$

とおいたとき、

$$0 \leq m_1 < \infty, \quad 0 \leq m_2 < \infty,$$

$$0 \leq M_1 < \infty, \quad 0 \leq M_2 < \infty$$

が成り立つと仮定してよい。次に、 $\beta = |b|$ とおき、

$$r = \min\left(r_0, \frac{1}{2(1+m_1)}, \frac{(\beta-1)u}{m_2}, \frac{\beta-1}{16uM_1}, \frac{\beta-1}{4M_2}\right)$$

とする。このとき、

$$(x, y) \in D_r \times D_u \quad \text{ならば} \quad F_1(x, y) \in D_{\frac{r}{2}}$$

が成り立つ。じっさい、

$$|F_1(x, y)| = |x^2(1 + g_1(x, y))| < r^2(1 + m_1) < \frac{r}{2}$$

である。

D_r から D_u への複素解析的関数の空間を

$$X = \{\varphi: D_r \rightarrow D_u\}$$

とし、一様収束位相をいれる。 $\varphi \in X$ にたいし、 ψ に関する関数方程式

$$F_2(x, \psi(x)) = \varphi(F_1(x, \psi(x)))$$

を考えれば、以下に示すように、陰関数として ψ が一意的に定まる。グラフ変換 $\Gamma: X \rightarrow X$ を $\Gamma(\varphi) = \psi$ で定義する。

実際、 $\varphi \in X$ とし、 $x \in D_r$ のとき、

$$F_2(x, y) = \varphi(F_1(x, y))$$

をみたす $y \in D_u$ はただ1つ存在する。このことを次に示す。

$$h(y) = F_2(x, y) - \varphi(F_1(x, y))$$

とおき、 $h(y) = 0$ をみたす y を求めるアルゴリズムとして、

$$N(y) = y - \frac{1}{b}h(y) = -\frac{1}{b}(xg_2(x, y) - \varphi(F_1(x, y)))$$

を考えれば、 $\varphi(F_1(x, y)) \in D_u$ に注意して、

$$\begin{aligned} |N(y)| &\leq \frac{1}{\beta}(|xg_2(x, y)| + |\varphi(F_1(x, y))|) \\ &< \frac{1}{\beta}(rm_2 + u) \leq \frac{1}{\beta}((\beta - 1)u + u) = u \end{aligned}$$

がえられるので、 $N(y) \in D_u$ 。

次に、 $N: D_u \rightarrow D_u$ は縮小写像であることを示す。 $y_1, y_2 \in D_u$ のとき、

$$N(y_1) - N(y_2) = -\frac{1}{b}(x(g_2(x, y_1) - g_2(x, y_2)) + (\varphi(F_1(x, y_1)) - \varphi(F_1(x, y_2)))).$$

ところで、

$$|g_2(x, y_1) - g_2(x, y_2)| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) dy \right| \leq M_2 |y_1 - y_2|$$

および、

$$\begin{aligned} |\varphi(F_1(x, y_1)) - \varphi(F_1(x, y_2))| &= \left| \int_{y_2}^{y_1} \varphi'(F_1(x, y)) \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy \right| \\ &\leq \frac{4u}{r} r^2 M_1 |y_1 - y_2| = 4ur M_1 |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

に注意すると、

$$|N(y_1) - N(y_2)| \leq \frac{1}{\beta}(rM_2 + 4urM_1)|y_1 - y_2|$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta-1}{4} + \frac{\beta-1}{4} \right) |y_1 - y_2| = \frac{\beta-1}{2\beta} |y_1 - y_2| < \frac{1}{2} |y_1 - y_2|$$

である。よって、 $h(y) = 0$ は一意的な解 $y = \psi(x)$ をもつ。すべての $x \in D_r$ についてこれがいえるので、 $\psi = \Gamma(\varphi)$ は一意的に定まる。この関数は陰関数によって与えられるので、解析的である。

次に、グラフ変換 $\Gamma: X \rightarrow X$ は sup ノルム

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in D_r} |\varphi(x)|$$

に関して縮小写像であることを示す。 $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ に対し、 $\psi_1 = \Gamma(\varphi_1)$, $\psi_2 = \Gamma(\varphi_2)$ とする。 $x \in D_r$ に対し、

$$\begin{aligned} |F_2(x, \psi_1(x)) - F_2(x, \psi_2(x))| &= |b(\psi_1(x) - \psi_2(x)) + x(g_2(x, \psi_1(x)) - g_2(x, \psi_2(x)))| \\ &\geq |b(\psi_1(x) - \psi_2(x))| - |x \int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) dy| \\ &\geq \beta |\psi_1(x) - \psi_2(x)| - |x| M_2 |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \\ &\geq (\beta - r M_2) |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \end{aligned}$$

であり、一方、

$$\begin{aligned} &|\varphi_1(F_1(x, \psi_1(x))) - \varphi_2(F_1(x, \psi_2(x)))| \\ &\leq |\varphi_1(F_1(x, \psi_1(x))) - \varphi_2(F_1(x, \psi_1(x)))| + |\varphi_2(F_1(x, \psi_1(x))) - \varphi_2(F_1(x, \psi_2(x)))| \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \left| \int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} \varphi_2'(F_1(x, y)) \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy \right| \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| + 4ur M_1 |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \end{aligned}$$

である。 $\psi_1 = \Gamma(\varphi_1)$, $\psi_2 = \Gamma(\varphi_2)$ であることから、

$$F_2(x, \psi_1(x)) = \varphi_1(F_1(x, \psi_1(x))),$$

$$F_2(x, \psi_2(x)) = \varphi_2(F_1(x, \psi_2(x)))$$

の両辺のそれぞれの差の絶対値をつくれば、

$$(\beta - r M_2 - 4ur M_1) |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

がえられる。

$$\beta - r(M_2 + 4u M_1) \geq \frac{1 + \beta}{2} > 1$$

であるので、これがすべての $x \in D_r$ について成り立つことに注意すれば、

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq \frac{2}{1 + \beta} \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

であることがわかった。従って、グラフ変換 $\Gamma: X \rightarrow X$ は縮小写像である。 X は完備な距離空間なので、グラフ変換 Γ はただ1つの不動点をもつ。その不動点を φ_0 とする。 F に課した条件から、

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0) = 0$$

がいえ。

$y = \varphi_0(x)$ のグラフを W とする。 W は \mathbb{C}^2 の原点を通る複素解析的曲線である。 W の原点のまわりの局所座標として、 x を流用する。 F をこの曲線に制限すると、 W から W への写像 $\rho: W \rightarrow W$ が、 $\rho(x) = F_1(x, \varphi_0(x))$ によって与えられる。計算によって、

$$\rho(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0, \quad \rho''(0) = 2$$

となることが確かめられるので、この $\rho: W \rightarrow W$ に対して Böttcher の定理を適用することができる。すなわち、原点近傍で定義された解析的な写像 $\sigma: D \rightarrow W$ で、 $\sigma(0) = 0$, $\sigma'(0) = 1$ であり、

$$\rho \circ \sigma(\zeta) = \sigma(\zeta^2)$$

をみたすものがただ1つ存在する。 ρ は F の W への制限であるから、この σ が求める解析的な埋め込みである。

Reference

Böttcher: Bull. Kasan Math. Soc. 14 (1905) p176.

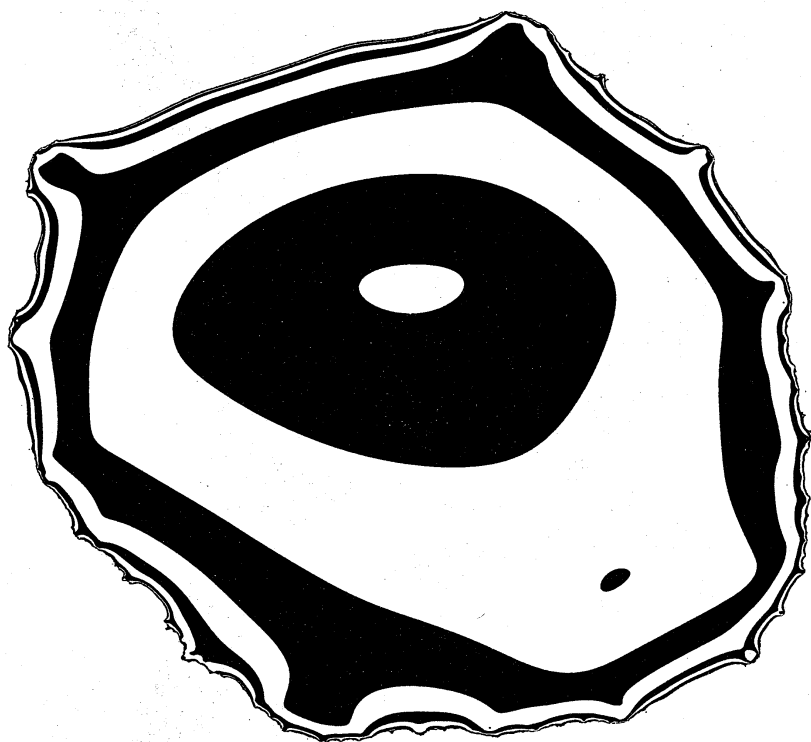


图 1



图 2

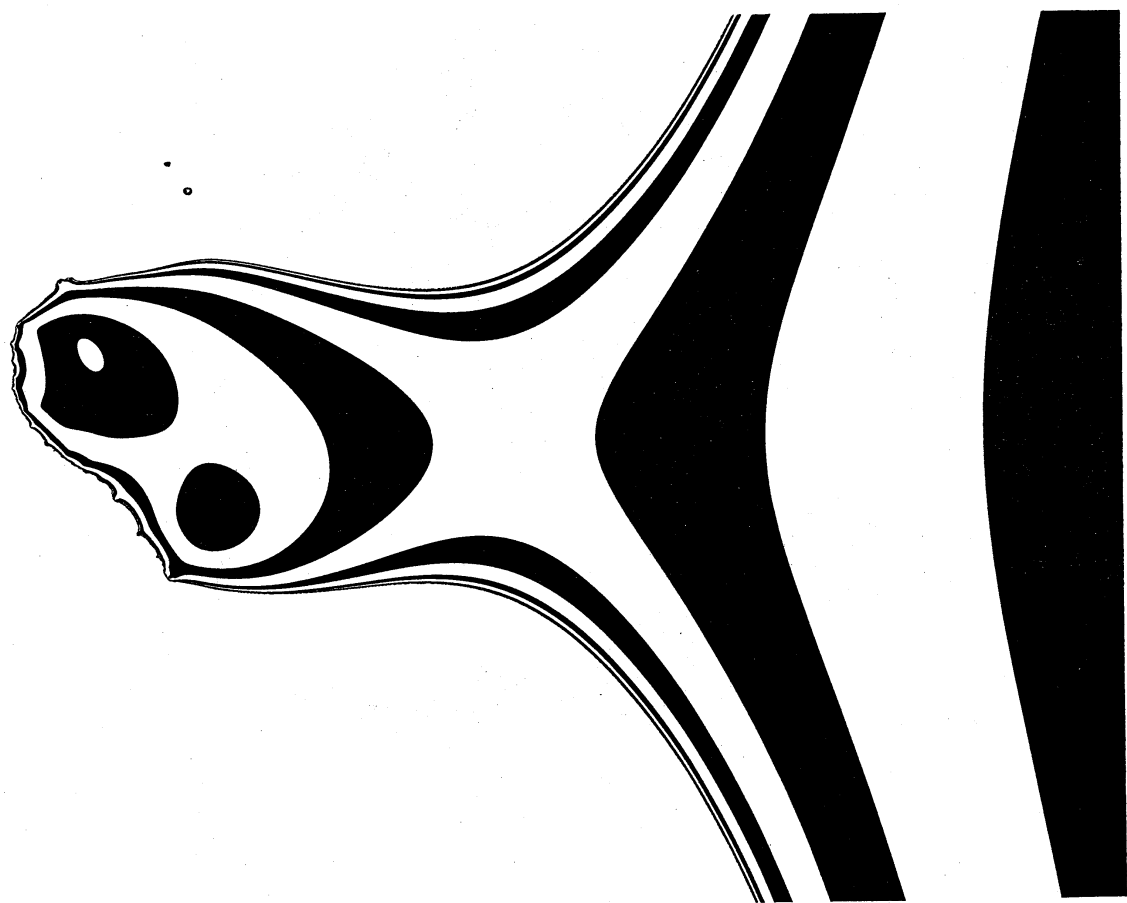


图 3

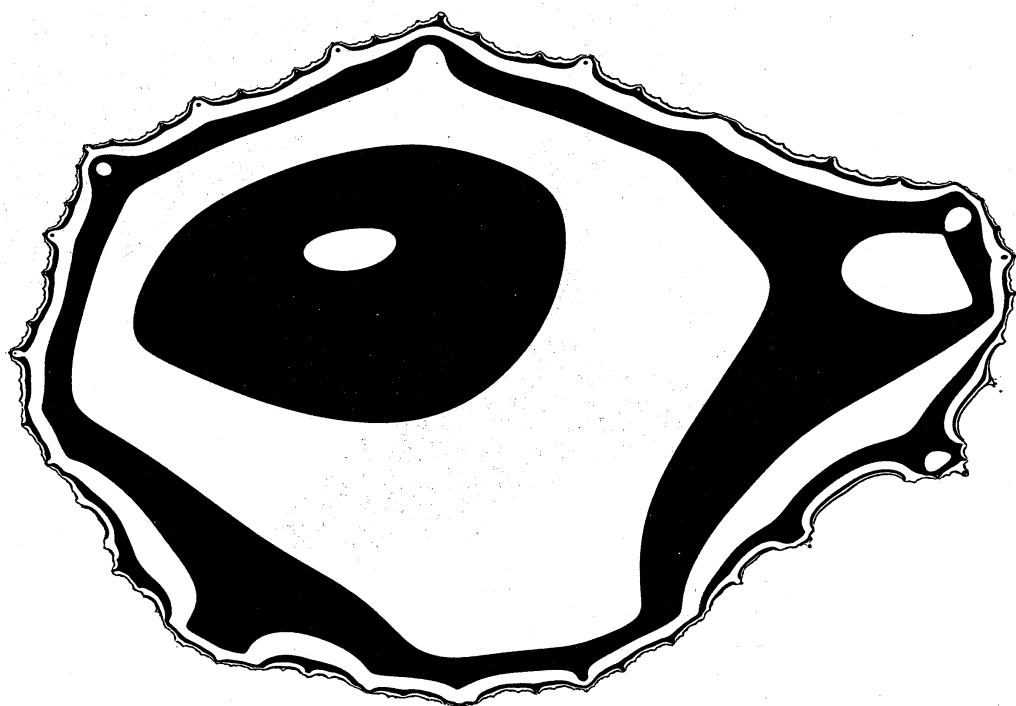


图 4

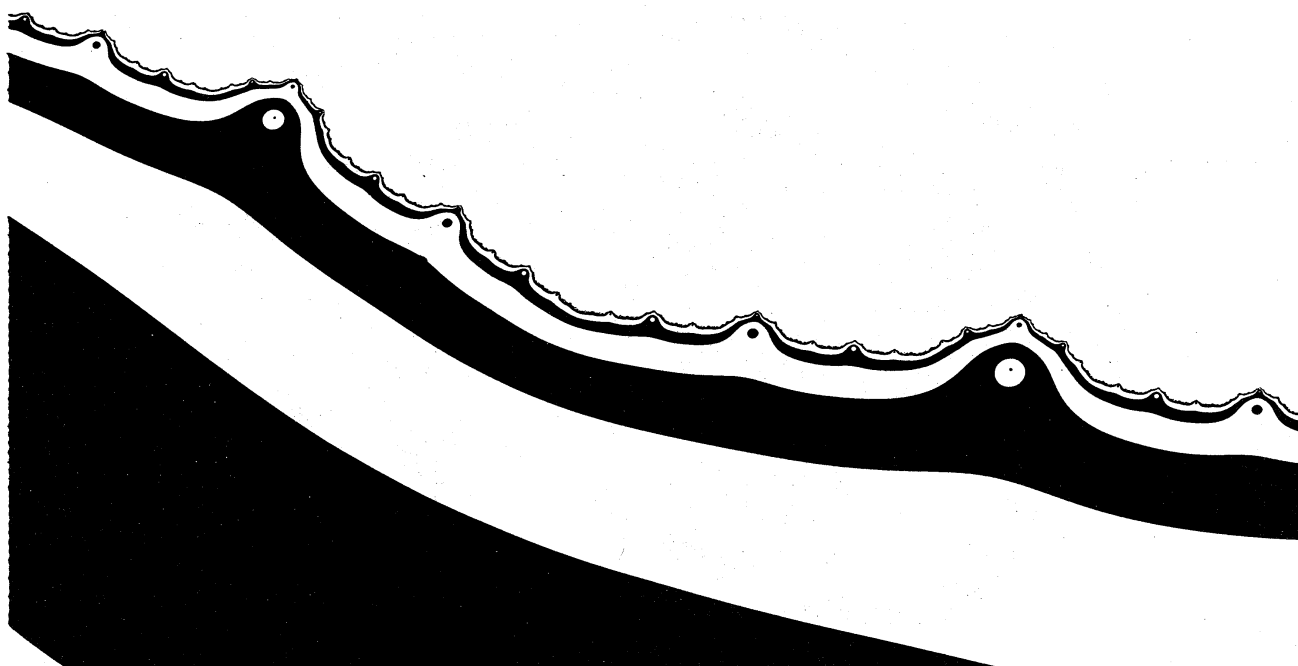


图 5



图 6

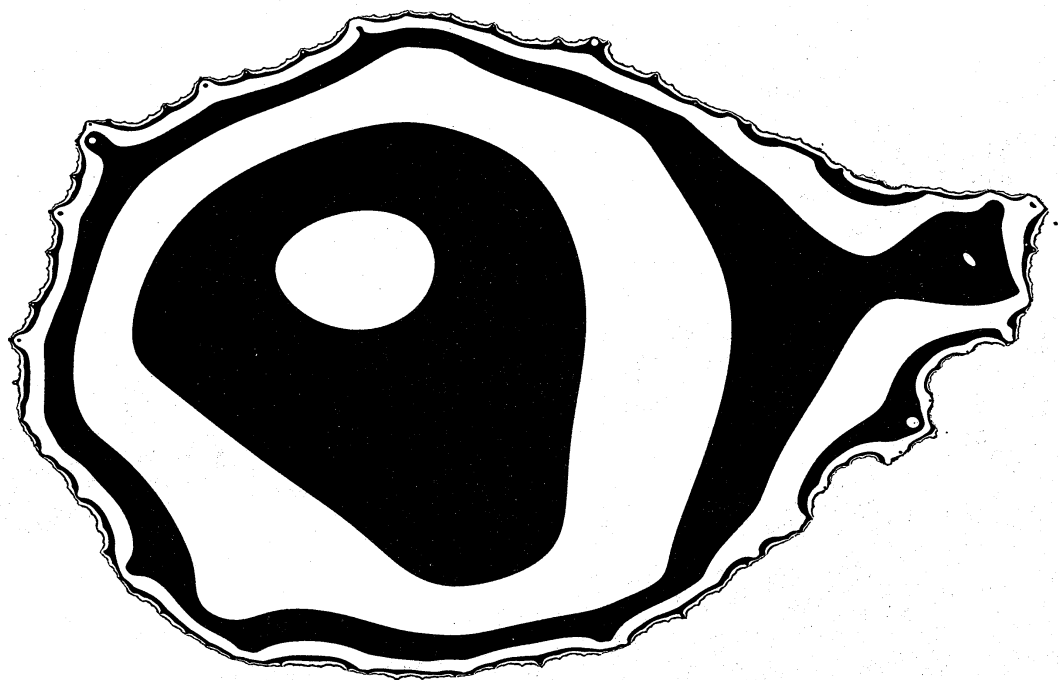


图 7

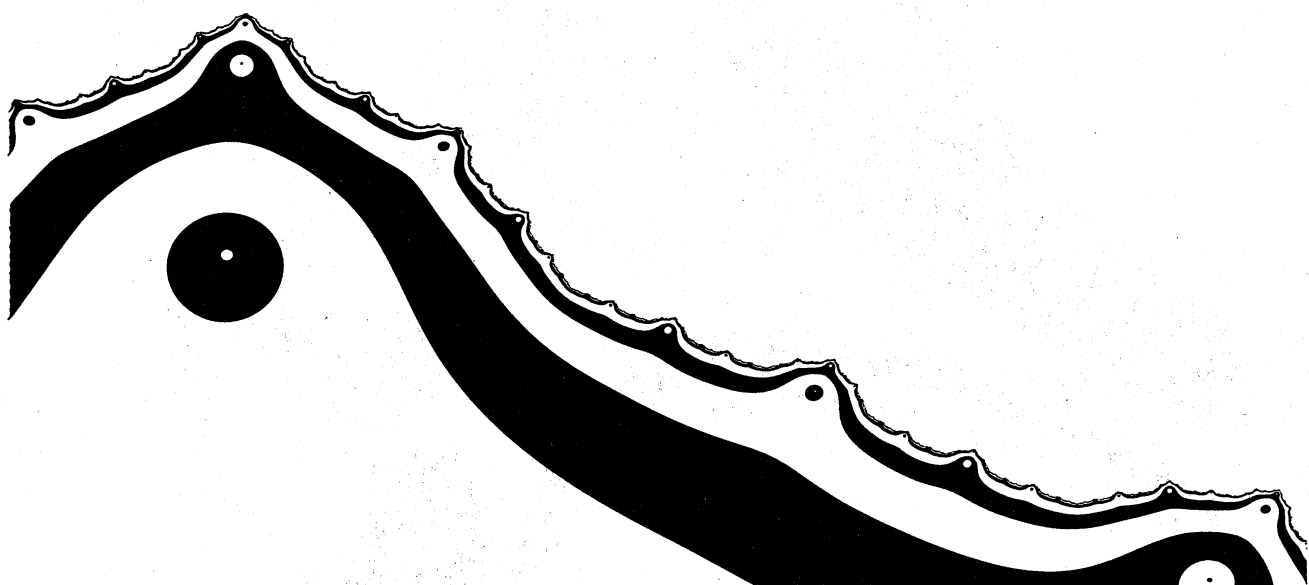


图 8



图 9